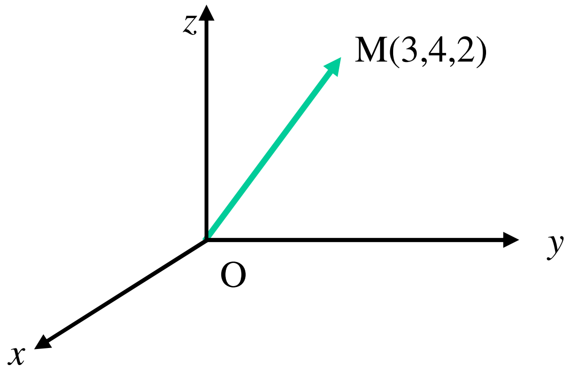
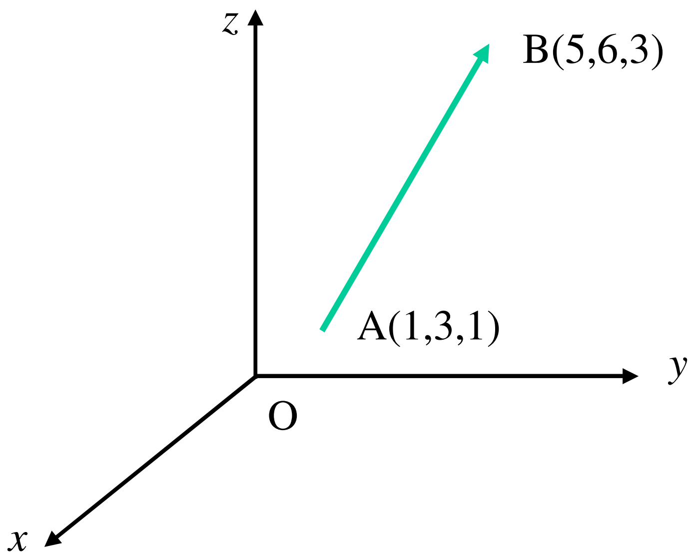
ÖRNEKLER-VEKTÖRLER

1. Aşağıdaki vektörleri analitik olarak yazınız.





Çözüm: $\vec{OM}$ =3**i**+4**j**+2**k** ya da $\vec{OM}$ =3$\mathbf{e}_1$+4$\mathbf{e}_2$+2$\mathbf{e}_3$

$\vec{AB}$=4**i**+3**j**+2**k**

2. $\vec{OM}$ =3**i**+4**j**+2**k** ve $\vec{AB}$=4**i**+3**j**+2**k** ise;

$\vec{OM} + \vec{AB}$,

$\vec{OM} - \vec{AB}$,

$\vec{OM} . \vec{AB}$,

Vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm:

3. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}$ ve $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1 & 5\end{pmatrix}$ ise vektörler arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm: $\mathbf{u}.\mathbf{v}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}=u_1v_1+u_2v_2$

$$=2.(-1)+5.6=28$$

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}=\frac{28}{\sqrt{40}\sqrt{26}}=0.8682$$

4. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vektörünü normalize ediniz.

Çözüm: $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2 + 2^1} = \sqrt{25} = 5$

$$\mathbf{u}_N = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 5 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5. **u**=**i**+2**j**-3**k** ve **v**=4**i**-5**j**-6**k** vektörleri verilmiştir. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ vektörel çarpımını ve aralarındaki açının sinüsünü bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-12-15)\mathbf{i} - (-6+12)\mathbf{j} + (-5-8)\mathbf{k}$$

$$= -27\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 13\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{e}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{(-27)^2 + (-6)^2 + (-13)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-6)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{467}}{7\sqrt{11}}$$

6. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}c & 1 & -1\end{pmatrix}$ ve $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & c^2\end{pmatrix}$ vektörleri verilmiştir. $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ vektörel çarpım vektörü *xy*-düzlemine paralel olacak şekilde *c* skalerini bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ c & 1 & -1\\ -3 & 1 & c^2\end{vmatrix}=\left(c^2+1\right)\mathbf{i}-\left(3-c^3\right)\mathbf{j}+\left(c+3\right)\mathbf{k}$$

Vektörel çarpım vektörü, *xy*-düzlemine paralel ise *z*-eksenine dolayısı ile *z* ekseninin birim vektörü **k** ya diktir,

$$\left(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\right)\mathbf{k}=0$$

$$\left[\left(c^2+1\right)\mathbf{i}-\left(3-c^3\right)\mathbf{j}+\left(c+3\right)\mathbf{k}\right]\mathbf{k}=0$$

$$c=-3$$

7. **u=i**+2**j+k** vektörünün **v=**4**i**-4**j**+7**k** vektörü üzerindeki izdüşümünü bulunuz.

Çözüm: **v** vektörü yönündeki birim vektör **e=v**$_n$ olsun.

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}}{\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}}=\frac{1}{9}(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})$$

Vektörel izdüşüm vektörü **w** olsun,

$$izd\,\mathbf{u}=\mathbf{w}$$

$$\mathbf{w}=|\mathbf{w}|\mathbf{e} \text{ ve } |\mathbf{w}|=|\mathbf{u}|\cos\theta=\mathbf{ue}$$

$$|\mathbf{w}|=\frac{1}{9}(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$|\mathbf{w}|=\frac{19}{9} \text{ ve}$$

$$izd\mathbf{u}=\mathbf{w}=|\mathbf{w}|\mathbf{e}$$

$$=\frac{19}{9}\frac{1}{9}(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})$$

$$=\frac{19}{81}(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})$$

8. Eğer **u** ve **v** üç boyutlu uzaydaki iki vektör ise, $\mathbf{u}.(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Üç boyutlu uzaydaki her hangi iki vektör

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ise

$$\mathbf{u}.(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (u_1, u_2, u_3)(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\mathbf{u}.(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$= 0$$

9. Eğer **u** ve **v** üç boyutlu uzaydaki iki vektör ise,
$|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$ (Lagrange özdeşliği) olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Üç boyutlu uzaydaki her hangi iki vektör
$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ise

$$|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

Kare alma ve çarpma işlemlerinden sonra eşitlik ortaya çıkar.

10. Üç boyutlu uzaydaki iki vektör **u** ve **v** için vektörel çarpımdan $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ elde edilen vektörün uzunluğunun,

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Hatırlanacağı üzere

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

ve Lagrange özdeşliği

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$$

olup bu ifadede **u**.**v** yerine konarak,

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta)^2$$

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2\theta$$

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2\theta$$

sonuç olarak:

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$