Negatif Binom Dağılımı

- Bernoulli deneyinin tüm varsayımları negatif binom dağılımı içinde geçerlidir.
- Binom dağılımında n denemede x adet başarı olasılığı ile ilgilenilirken, negatif binom dağılımında ise şans değişkeni (x) k ncı başarıyı elde edinceye kadar yapılan deney sayısına karşılık gelir.

- **Örnekler:**

Bir parayı 5 kez tura gelinceye kadar attığımızda 5 nci turayı elde ettiğimiz deneme sayısı,

Bir basketbolcunun 3 sayılık atışlarda 10 ncu isabeti sağlaması için gerekli olan atış sayısı.

1

- **x : deney sayısı** **k : başarı sayısı**
- **p : başarı olasılığı** S = { x / k, k+1, k+2, k+3… }

1 2 3 ………………. x-1 x

1 2 3 ...……………. k-1 k

Binom dağılımını kullanarak x-1 denemede k-1 adet başarı olasılığını hesaplanır ve x nci denemedeki k ncı başarıyı elde etme olasılığı p ile bağımsız olaylar olduğundan çarpılarak aşağıdaki olasılık fonksiyonu elde edilir.

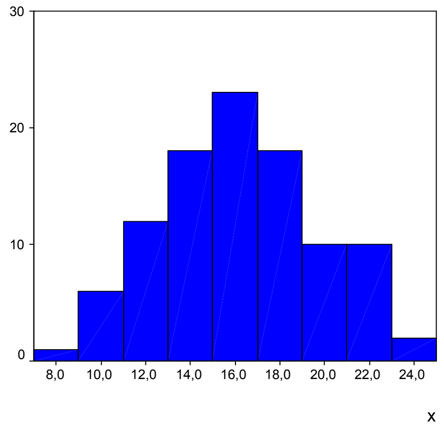
$$P(X=x)=\begin{cases}\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k} & x=k,k+1,k+2,.....\\ 0 & d.d\end{cases}$$

2

Negatif Binom Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

$$E(x) = \mu = \frac{k}{p} \qquad Var(x) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

Yandaki histogram p = 0,5 ve k = 8 parametreli negatif binom dağılım gösteren bir populasyondan alınmış 100 hacimlik bir örnek için oluşturulmuştur.



3

Örnek: Bir kişinin hilesiz bir zarı 10 kez atması sonucunda, 10 ncu atışında 5 nci kez 6 gelmesi olasılığını hesaplayınız.

p = 1 / 6   1- p = 5 / 6   x = 10   k = 5

$$P(X = 10; k = 5) = \binom{10-1}{5-1} .(\frac{1}{6})^5 .(\frac{5}{6})^5$$

$$= \binom{9}{4} . \frac{5^5}{6^{10}} .$$

- Zarın kaçıncı kez atılması sonucu 5 nci kez 6 gelmesini beklersiniz?

$$E(x) = \frac{k}{p} = \frac{5}{1/6} = 30$$

4

Geometrik Dağılım

• Bernoulli deneyinin tüm varsayımları geometrik dağılım içinde geçerlidir.

• Negatif Binom dağılımının özel bir durumudur.

• k = 1 olduğunda negatif binom dağılımı geometrik dağılımı olarak ifade edilir.

• Geometrik dağılım gösteren şans değişkeni X, ilk başarıyı elde edinceye kadar yapılan deney sayısını ifade eder.

Örnekler:

• Bir parayı tura gelinceye kadar attığımızda tura gelmesi için yapılan atış sayısı,

• Bir işletmenin deposundan ilk hatalı ürünü bulana kadar alınan örnek sayısı.

5

• **x: deney sayısı** **p: başarı olasılığı**

• S = { x / 1, 2, 3, 4….. }

Negatif Binom dağılımında k = 1 alındığında;

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & x = k, k+1, k+2, ... \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$$P(X = x) = \left\{ \binom{x-1}{1-1} p^1 (1-p)^{x-1} \right.$$

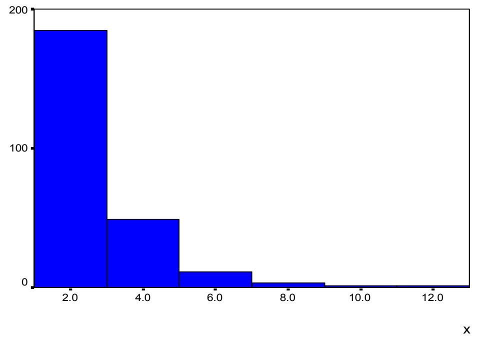
$$P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1,2,3,..... \\ 0 & d.d \end{cases}$$

6

Geometrik Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

$$E(x) = \mu = \frac{1}{p} \qquad Var(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

Yandaki histogram p = 0,5 parametreli geometrik dağılım gösteren populasyondan alınmış 250 hacimlik bir örnek için oluşturulmuştur.



7

Örnek: Bir avcı hedefe isabet sağlayana kadar ateş etmektedir. Avcının hedefi vurma olasılığı 0,75 olduğuna göre avcının hedefi ilk kez 8 nci kez atış yaptığında isabet ettirmesinin olasılığını hesaplayınız.

x = 8 P (X = 8) = ?

$$P(X = x) = \begin{cases} (0{,}75)(1-0{,}75)^{x-1} & x = 1,2,3.... \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$$P(X = 8) = (0{,}75)(1-0{,}75)^{8-1} = (0{,}75)(0{,}25)^7$$

ÖDEV: Avcının hedefi ilk kez vurma olasılığı 0,05'den az olması için hedefe en az kaç kez ateş etmelidir?

8

Hipergeometrik Dağılım

Varsayımları,

• *n* deneme benzer koşullarda tekrarlanabilir.

• Her denemenin 2 mümkün sonucu vardır.

• Sonlu populasyondan **iadesiz** örnekleme yapılır.

• Örnekleme iadesiz olduğundan başarı olasılığı (p) deneyden deneye **değişir.**

9

Hipergeometrik Dağılımın Olasılık Fonksiyonu

n : örnek hacmi

N : anakütle eleman sayısı

B : populasyondaki başarı sayısı

x : örnekteki başarı sayısı

S = { x / 0,1, 2, 3, …..,n }

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{B}{x}\binom{N-B}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0,1,2,3......,n \\ 0 & d.d \end{cases}$$

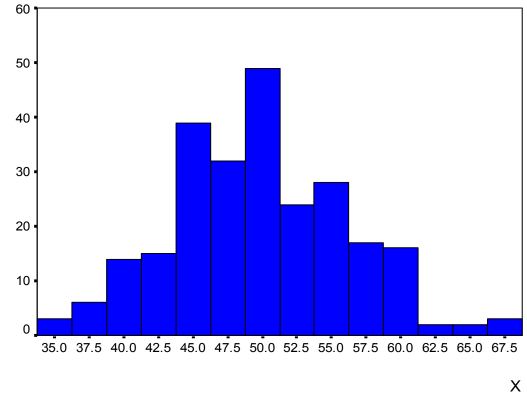
10

Hipergeometrik Dağılımın Karakteristikleri

p = B/N için

$$\begin{cases} E(x) = n\,p \\ Var(x) = np(1-p)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right) \end{cases}$$

Yandaki histogram N = 10000 ve B = 2000 parametreli hipergeometrik dağılım gösteren populasyondan alınmış 250 hacimlik bir örnek için oluşturulmuştur.



Örnek: Yeni açılan bir bankanın ilk 100 müşterisi içinde 60 tanesi mevduat hesabına sahiptir. İadesiz olarak rasgele seçilen 8 müşteriden 5 tanesinin mevduat hesabına sahip olmasının olasılığı nedir?

N= 100 B = 60 n = 8 x = 5

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{60}{x}\binom{100-60}{8-x}}{\binom{100}{8}} & x = 0,1,2,3......,\ 8 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{60}{5}\binom{40}{3}}{\binom{100}{8}}$$

ÖDEV: En çok 1 kişinin mevduat hesabına sahip olmasının olasılığını hesaplayınız.

Poisson Dağılımı

- Kesikli Şans değişkenlerinin olasılık dağılımlarından en önemlilerinden biri Poisson Dağılımıdır.
- Günlük hayatta ve uygulamada çok sayıda kullanım alanı bulunmaktadır.
- Ünlü Fransız matematikçisi Poisson tarafından bulunmuştur.
- Belirli bir alan içerisinde rasgele dağılan veya zaman içerisinde rasgele gözlenen olayların olasılıklarının hesaplanabilmesi için çok kullanışlı bir modeldir.

Poisson Sürecinin Varsayımları

1. Belirlenen periyotta meydana gelen ortalama olay sayısı sabittir.
2. Herhangi bir zaman diliminde bir olayın meydana gelmesi bir önceki zaman diliminde meydana gelen olay sayısından bağımsızdır.(periyotların kesişimi olmadığı varsayımı ile)
3. Mümkün olabilecek en küçük zaman aralığında en fazla bir olay gerçekleşebilir.
4. Ortaya çıkan olay sayısı ile periyodun uzunluğu doğru orantılıdır.

Örnekler

- Bir şehirde bir aylık süre içerisinde meydana gelen hırsızlık olayların sayısı,
- Bir telefon santraline 1 dk. içerisinde gelen telefon çağrılarının sayısı,
- Bir kitap içindeki baskı hatalarının sayısı,
- İstanbul'da 100 m^2'ye düşen kişi sayısı,
- Ege Bölgesinde 3 aylık sürede 4,0 şiddetinden büyük olarak gerçekleşen deprem sayısı.

15

Poisson Dağılımının Olasılık Fonksiyonu

λ : belirlenen periyotta ortaya çıkan olay sayısı

x : ortaya çıkma olasılığı araştırılan olay sayısı

S = { x / 0,1, 2, 3, ….., }

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots \\ 0 & diger \quad durumlarda \end{cases}$$

16

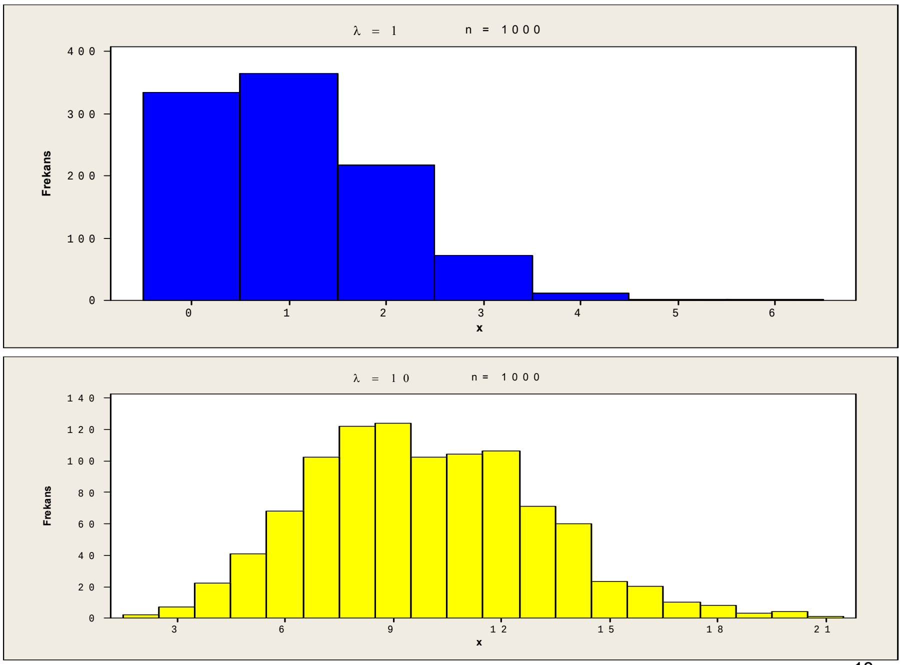
Poisson Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

Beklenen Değer $E(x) = \mu = \lambda$

Varyans $Var(x) = \lambda$

• ***Beklenen değeri ve varyansı birbirine eşit olan tek dağılıştır.***

17



18

Örnek: Bir mağazaya Cumartesi günleri 5 dakikada ortalama olarak 4 müşteri gelmektedir. Bir Cumartesi günü bu mağazaya,

a) 5 dakika içinde 1 müşteri gelmesi olasılığını,

b)Yarım saate 2'den fazla müşteri gelmesi olasılığını,

a) $\lambda = 4$ P (x = 1) = ? $$P(X = 1) = \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 4e^{-4}$$

b) 5 dk'da 4 müşteri gelirse, 30 dk'da 24 müşteri gelir.

$\lambda = 24$ P (x > 2) = ?

P(x > 2) = 1 – [P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)]

$$1-\left(\frac{e^{-24}24^0}{0!}+\frac{e^{-24}24^1}{1!}+\frac{e^{-24}24^2}{2!}\right)=1-313e^{-24}$$

ÖDEV: 1 saatte en çok 1 müşteri gelmesinin olasılığını hesaplayınız.

19

SÜREKLİ ŞANS DEĞİŞKENLERİNİN OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONLARI

- **Üstel Dağılım**
- **Sürekli Üniform Dağılım**
- **Normal Dağılım**

20

Üstel Dağılım

• Meydana gelen iki olay arasındaki geçen süre veya bir başka ifadeyle ilgilenilen olayın ilk defa ortaya çıkması için geçen sürenin dağılışıdır.

Örnek:

• Bir bankada veznede yapılan işlemler arasındaki geçen süre,

• Bir taksi durağına gelen müşteriler arasındaki süre,

• Bir hastanenin acil servisine gelen hastaların arasındaki geçen süre,

• Bir kumaşta iki adet dokuma hatası arasındaki uzunluk (metre).

21

• Belirli bir zaman aralığında mağazaya gelen müşteri sayılarının dağılışı Poisson Dağılımına uygundur.

• Bu müşterilerin mağazaya varış zamanları arasındaki geçen sürenin dağılımı da Üstel Dağılıma uyacaktır.

• Üstel Dağılımın parametresi β olmak üzere Üstel ve Poisson Dağılımlarının parametreleri arasında şu şekilde bir ilişki vardır.

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

22

Üstel Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

β : iki durumun gözlenmesi için gereken ortalama süre yada ölçülebilir uzaklık.

x : iki durum arasında veya ilk durumun ortaya çıkması gereken süre yada uzaklık.

S = { x / 0 < x < ∞ }

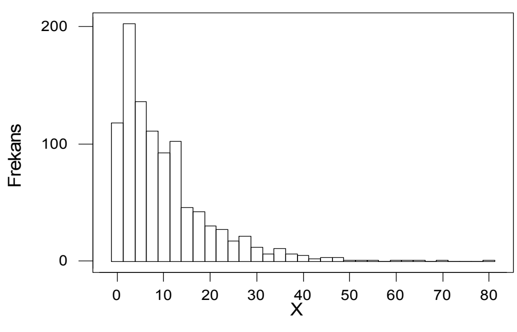
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & diger \quad durumlarda \end{cases}$$

23

Üstel Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

Beklenen Değer $E(x) = \beta$

Varyans $Var(x) = \beta^2$



β = 10 parametreli bir populasyondan alınan n = 1000 hacimlik bir örnek için oluşturulan histogram.

24

Örnek: Bir taksi durağına bir saatlik zaman dilimi içerisinde gelen taksilerin geliş sayısı Poisson Dağılışına uygun bir şekilde gerçekleşmektedir. Durağa saatte ortalama 24 adet taksinin geldiği bilindiğine göre durağa gelen bir yolcunun en çok 5 dakika beklemesi olasılığı nedir?

Saatte (60 dakikada) 24 adet taksi geliyorsa,

1 dakikada 24/60 adet taksi gelir. 1 adet taksi gelmesi için gereken süre β = 2,5 dk olur. P (x ≤ 5) = ?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2,5}e^{-\frac{x}{2,5}} & ,x>0\\ 0 & \text{diger durumlarda}\end{cases}$$

HESAPLAMA KOLAYLIĞI!!

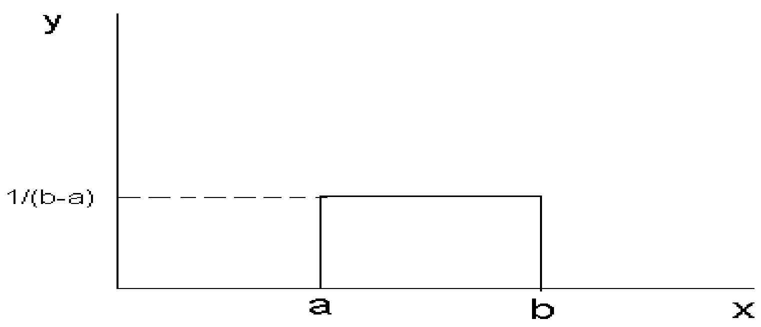
$$P(x\geq a)=\int_a^{\infty}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}dx=e^{-\frac{a}{\beta}}$$

$$P(x\leq 5)=\int_0^5\frac{1}{2,5}e^{-\frac{1}{2,5}x}dx=1-\int_5^{\infty}\frac{1}{2,5}e^{-\frac{1}{2,5}x}dx=1-e^{-\frac{5}{2,5}}=1-e^{-2}$$

25

Sürekli Üniform Dağılımı

- a ve b gibi iki nokta arasından bir sayı seçmek istediğimizde herhangi bir değeri alabilecek x şans değişkeni uniform dağılışı göstermektedir.
- Sürekli üniform dağılımı ilgilenilen şans değişkeninin olasılık fonksiyonu hakkında bir bilgiye sahip olunmadığında ve verilen aralık içerisinde tanımlanan olayın eşit olasılıklarla



26

Sürekli Uniform Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & dd \end{cases}$$

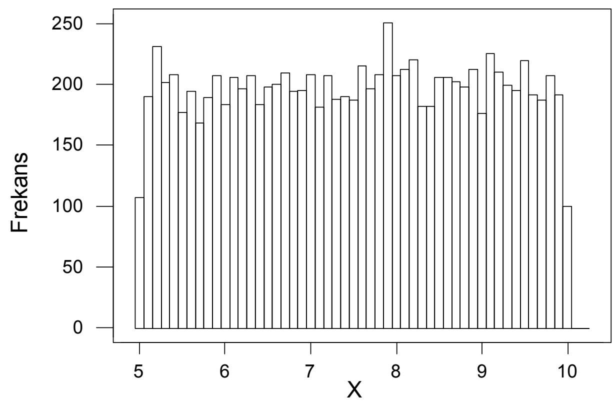
HESAPLAMA KOLAYLIĞI!!

$$P(c \leq x \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b = 10 ve a = 5 parametreli sürekli üniform dağılımı gösteren bir populasyondan n = 10000 hacimlik örnek için oluşturulan histogram.



Örnek: Bir demir-çelik fabrikasında üretilen çelik levhaların kalınlıklarının 150 ile 200 mm arasında değiştiği ve bunların sürekli uniform şans değişkenine uygun olduğu bilinmektedir. Levha kalınlıkları 155 mm altında çıktığı zaman tekrar üretime gönderildiğine göre bu dağılımın beklenen değerini ve varyansını bulunuz ve üretim sürecinde tekrar üretime gönderilen levhaların oranını bulunuz.

a) Bu dağılışın ortalama ve varyansı;
$E(x)=(150+200)/2 = 175$ mm
$Var(x)=(200-150)^2/12 = 208.33$ mm^2 bulunur.

b) Üretime geri döndürülen ürünlerin oranı ise;
$P(150 < x < 155) = (155-150) / (200-150) = 0,1$
Ürünlerin %10'u üretime geri gönderilmektedir.